Segundo Parcial Matemáticas 2 Miguel Guzmán (3-4)

Primer Pregunta.

$$1.-\int_0^1 \frac{1}{2-\sqrt[3]{x}}dx$$

Haciendo la sustitución $u^3 = x \quad => \quad 3u^2du = dx$, cambio de límite $\begin{cases} x = 0 & => & u = 0 \\ x = 1 & => & u = 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \frac{3u^2}{1-u} \quad =$$

Diviendo polinomios queda

$$I = 3\int_0^1 -u-2+\frac{4}{2-u}du \quad => \quad I = 3\left(-\frac{u^2}{2}-2u-4\ln(2-u)\right)_0^1$$

$$I = 3\left(-\frac{1}{2}-2+4\ln(2)\right) \quad => \quad I = 3\left(-\frac{5}{2}+4\ln(2)\right)$$

$$2.-\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

Si reconoce que $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, se tiene que

$$I = \int \operatorname{arcsinh}(x)\,dx$$

Por parte, sea el cambio

$$u = \operatorname{arcsinh}(x) \qquad dv = dx \qquad => \quad du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad v = x$$

Aplicando el teorema de integración por parte.

$$I = x\operatorname{arcsinh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Integrando de nuevo

$$I = x\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$3.-\int \operatorname{csch}(ln(x))\,dx$$

Por definición de hiperbólicas

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Por lo que

$$I=\int\frac{2}{e^{\ln(x)}-e^{-\ln(x)}}dx\quad =>\quad I=\int\frac{2}{x-x^{-1}}dx\quad =>\quad I=2\int\frac{x}{x^2-1}dx$$

Integrando con el cambio $u=x^2-1\quad =>\quad du=2xdx$

$$I=\ln(x^2-1)+C$$

Segunda Pregunta.

1.- Para demostrar, se tiene

$$\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}=\frac{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}=\frac{2e^x}{2e^{-x}}=e^{2x}$$

Tercera Pregunta

Primero buscamos dominio

$$(1)\quad x-1>0\quad =>\quad x>1\qquad (2)\quad x+2>0\quad =>\quad x>-2$$

Por lo que $Dom(x)\in(1,\infty)$

, Aplicamos propiedades

$$\log_3\left(\frac{x-1}{x+2}\right)>2$$

Aplicando lo exponencial de base 3

$$3^{\log_3\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}>3^2\quad =>\quad \frac{x-1}{x+2}>9$$

Resolvemos la desigualdad

$$\frac{x-1}{x+2}-9>0\quad =>\quad \frac{-8x-19}{x+2}>0$$

Recordando MATEMATICAS 1

$$x\in\left(-2\,,-\frac{19}{8}\right)$$

Luego comparando con dominio, se concluye que

$\nexists x$ Luego no hay solución, posible.

Cuarta Pregunta.

Dada la función

$$y = \sin(4x)^{\tan(3x)}$$

Aplicando logaritmo.

$$\ln(y) = \tan(3x)\ln(sin(4x))$$

Derivando

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2(3x)\,3\ln(sin(4x)) + \tan(3x)\frac{1}{\sin(4x)}\cos(4x)\,4$$

Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \sin(4x)^{\tan(3x)}\left(3\sec^2(3x)\ln(sin(4x)) + 4\tan(3x)\,ctan(4x)\right)$$